Ein Wanderer bewegt sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit von 6 km/h in gerader Ebene auf einen Berg zu. Als er um 9:00 Uhr die Bergspitze betrachtet, misst er einen Höhenwinkel von 22°. Als er die Bergspitze 25 Minuten später erneut betrachtet, kann er einen Höhenwinkel von 40° messen. Wie weit ist der Wanderer in den 25 Minuten zwischen der ersten und der zweiten Messung gekommen? Wie lang sind jeweils die Sichtlinien von seinen Messungspunkten zur Bergspitze? Wie hoch ist der Berg, wenn sich der Wanderer auf einer Ebene bewegt, die 550 Meter über dem Meeresspiegel liegt?

Überblick verschaffen. - Worum geht es überhaupt?

Trigonometrie; und ein bisschen Physik (ups!): Geschwindigkeit

1. Was wissen wir? - Herausschreiben, was gegeben ist. / Was wollen wir? - Herausfinden, was eigentlich gesucht ist.

Stecke zwischen den beiden "Blickpunkten": **25** Minuten bei **6** km/h (Uhrzeit irrelevant);

erster Höhenwinkel: **22°**; zweiter Höhenwinkel: **40°;**

die Ebene liegt **550m** über NN;

der Wanderer ist ca. **1,80m** groß (lege ich 'mal willkürlich fest; frei nach Pipi Langstrumpf: ***"Ich mache mir die Welt, wie sie mir gefällt....."***

gesucht sind vier Strecken: **Stecke zwischen den "Blickpunkten"**

1. und 2. Sichtlinie

Höhe des Berges

2. Welche Formeln und Abläufe passen zur Aufgabenstellung?

Trigonometrische Definitionen:

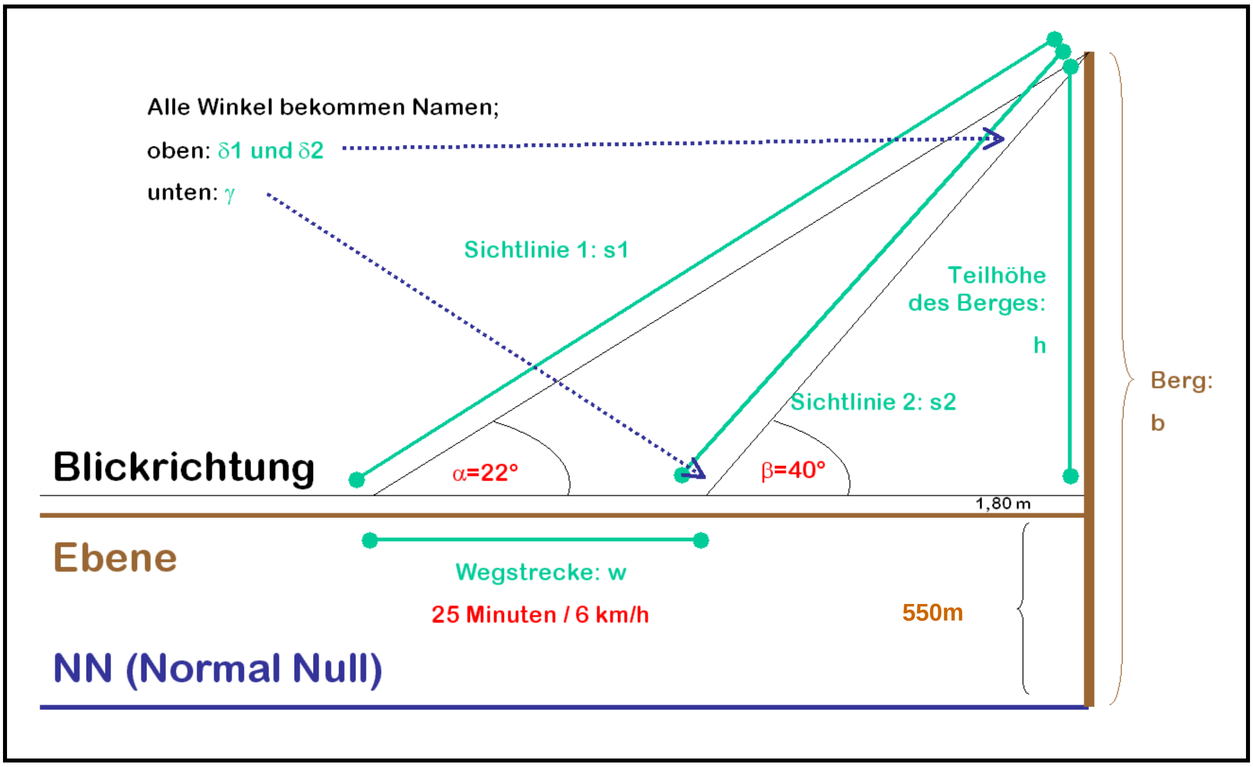
$$\boxed{\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}} \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}} \quad \boxed{\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}}$$

Sinussatz : $\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$

Kosinussatz: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$

$$\boxed{Geschwindigkeit = \frac{Strecke}{Zeit}; v = s/t}$$

3. Skizze machen!



4. Zettel raus und anfangen.

alle Winkel bestimmen (bei Trigonometrie-Aufgaben grundsätzlich zuerst!)

γ (Nebenwinkelsatz) $= 180° - \beta = 180° - 40° = \mathbf{140°}$

δ_1 (Winkelsummensatz) $= 180° - \gamma - \alpha = 180° - 140° - 22° = \mathbf{18°}$

$\delta 2$ (Winkelsummensatz) $= 180° - 90° - \beta = 180° - 90° - 40° = \mathbf{50°}$

Wegstrecke w:

Aus $v = {}^{s}\!/_{t}$ folgt: $s = v \cdot t$; unsere Strecke heißt w.

Auf die Einheiten achten: v in km/h; t in Minuten; also die Zeit in Stunden umrechnen (durch 60 teilen): $t = {}^{25}\!/_{60} = 0{,}41\overline{6}$ Stunden.

$w = 6 * 0{,}1466666666 = 2{,}5\ \text{km} = \mathbf{2.500\ m.}$

(Plausibilitätsprüfung: In knapp einer halben Stunde 2.500 m gehen ist okay)

1. Sichtlinie:

$$\frac{s1}{\sin\gamma}=\frac{w}{\sin\delta 1};\qquad \frac{s1}{\sin 140°}=\frac{2.500}{\sin 18°};\qquad s1=\frac{2.500\cdot\sin 140°}{\sin 18°}$$

s1 = 5.200,26 m

2. Sichtlinie:

$$\frac{s2}{\sin\alpha}=\frac{w}{\sin\delta 1};\qquad \frac{s2}{\sin 22°}=\frac{2.500}{\sin 18°};\qquad s2=\frac{2.500\cdot\sin 22°}{\sin 18°}$$

s2 = 3.030,63 m

(Plausibilitätsprüfung:
Wir sind dichter an den Berg herangekommen, also ist die 2. Sichtlinie kürzer!)

Höhe des Berges:

b = h + 1,8 +550

$$\sin\beta=\frac{h}{s2};\qquad h=s2\cdot\sin\beta;\qquad h=3.030{,}63\cdot\sin 40°$$

h = 1.948,05 m

b = 1.948,05 + 1,8 + 550 **= 2.499,85 m**

Somit ist der Berg ca. 2.500 m hoch.

Es folgt nun noch ein **Exkurs** zur Berechnung von h mit nur einer einzigen Formel (nur mit den gegebenen Winkeln und der Strecke dazwischen den Messpunkten).

(Funktioniert immer und man muss nicht so viel rechnen!)

Exkurs:

1. Von unten nach oben durch die Formeln gehen:

$h = s2 \cdot \sin\beta$; es fehlt also s2

$s2 = \dfrac{w \cdot \sin\alpha}{\sin\delta 1}$; es fehlt δ1

$\delta 1 = 180° - \gamma - \alpha$; es fehlt γ

$\gamma = 180° - \beta$

Nun werden alle Unbekannten von unten nach oben eingesetzt:

$\delta 1 = 180° - (180° - \beta) - \alpha = 180° - 180° + \beta - \alpha = \beta - \alpha$

$$s2 = \frac{w \cdot \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\boxed{h = w \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}}$$

Einsetzen ergibt:

$$h = 2.500 \cdot \frac{\sin 22° \cdot \sin 40°}{\sin(40° - 22°)} = 1.948,0521$$

Nun nur noch die Höhe der Ebene und die des Wanderers addieren und schon sind wir fertig.